

知識の構造

平成 24 年 9 月 12 日 高橋哲夫

1. 概要

知識とは不思議なもので、同じ知識をいくら足しても変化しない。異なる知識の和は元の知識とは異なる知識になる。

また、知識はそのままでは何の働きもしない。宿主がなければ身動きが取れない。知識は宿主である人やソフトウェアの挙動を規定する。宿主はある知識を元に新しい知識を生成する。

本稿ではこのような性質をもつ知識の集まり、つまり知識集合を定義し、知識の性質について考える。集合論では、集合の要素は点の集まりであるが、知識集合の要素の点には知識が対応する。更に、知識集合に距離を導入することについて考える。

知識集合の要素間に距離が与えられると、複数の知識間の“近さ”が求められる。この“近さ”は“似ている”とか“関係の深さ”という感覚で知識を捉えることを可能とする。

本項で扱う知識表現から文脈（知識の並びの順序）を排除した。そのことによって、知識の構造の扱いが容易になる。文脈を排除しても知識の距離を測ることに支障は出ないと考えたからである。

2. 知識の種類

知識には次の 3 つのカテゴリがあるが、

① 事実	観察、計測で得られたデータ、説明、など
② 論理から生成される概念	事実に論理を適用して得られる概念
③ 感覚	五感、印象、感動、意欲、意思、など

本稿では上記の①と②を扱う。③は扱わない。しかし、数値などで表現されたものは扱い、①のカテゴリに入れる。

3. 知識の演算

定義

(1) 知識の加算

1) 同じ知識は足しても変化しない。

知識 a について、

$$a + a = a$$

とする。

2) 異なる知識 a , b に対して

$$c = a + b$$

とおくと、 c と $a + b$ は同じ知識であり、 c は a , b から生成されたとする。ここに、

$$c \neq a , \quad c \neq b$$

である。

3) 知識の加算は可換である。

異なる知識 a , b に対して

$$a + b = b + a$$

であるとする。

例 知識 d , e が、

$$d = a + c , \quad e = b + c$$

としたとき、

$$d + e = a + b + c$$

である (上記 1) と 3) による)。

(2) 空知識

知識が存在しないことを空知識と呼び、 θ と表わす。

(3) 負の知識

ある知識を否定する知識を負の知識と呼ぶ。

知識 a の負の知識を $(-a)$ と表わす。

知識 a とその負の知識 $(-a)$ の加算は空知識 θ であるとする。

$$a + (-a) = \theta$$

例 異なる知識 a , b , c に対して

$$a + b = c$$

が成り立つとする。この両辺に b の負の知識 $(-b)$ を加算すると、

$$a + b + (-b) = c + (-b)$$

$$a + \theta = (-b) + c$$

$$a = (-b) + c$$

である。

このようにして、左辺の b は負の知識 $(-b)$ として右辺に持って行くことができる。

例 知識 d , e が

$$d = a + c \quad *1$$

$$e = b + c \quad *2$$

としたとき、2つの式に同じ c があるので、 c を仲介して、 a 、 b 、 d 、 e の関係を求めると

$$a + e = b + d$$

である。

c を削除するために、*1 から *2 を引くと、

$$d + (-e) = a + c + (-(b + c)) \quad ※$$

となる。

右辺の $-(b + c)$ は $(-b) + (-c)$ と書けるが、それは次のようにして分かる。

$$(-(b + c)) + (b + c) = \theta$$

$$\therefore (-(b + c)) + b + c = \theta$$

この両辺に $(-b)$, $(-c)$ を加算すると、

$$(-(b + c)) + b + (-b) + c + (-c) = (-b) + (-c)$$

$$\therefore (-(b + c)) = (-b) + (-c)$$

従って (※) は次のように整理できる。

$$d + (-e) = a + c + (-b) + (-c)$$

$$= a + (-b) + c + (-c)$$

$$= a + (-b) + \theta$$

$$= a + (-b)$$

$$\therefore d + (-e) = a + (-b)$$

である。両辺に e 、 b を加算して、

$$a + e = b + d$$

が求められる。

(4) 仮説

知識 a が正しいか否か判明していないとき、 a を仮説と呼び、

a'

と表わす。仮説が加算の中で使われるときは、

$$a' + b, a + b'$$

のように表わす。

(5) 一次結合

知識 x_1, x_2, \dots, x_n に対して、

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

と表される知識を x_1, x_2, \dots, x_n の1次結合と言う。

(6) 一次従属

知識 x_1, x_2, \dots, x_n に対して、

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \theta \quad \text{が成立するとき、}$$

x_1, x_2, \dots, x_n は1次従属であると言う。

このとき、

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \theta$$

の両辺に、 $(-x_2)$ を加算すると、

$$x_1 + x_3 + \dots + x_n = (-x_2)$$

となり、順番に $(-x_n)$ まで続けると、

$$x_1 = (-x_2) + (-x_3) + \dots + (-x_n)$$

となる。

このようにして、 x_1 は x_2, \dots, x_n で表現される。

(7) 一次独立

知識 x_1, x_2, \dots, x_n の各 x_i が、他の知識の一次結合で表現できないとき、 x_1, x_2, \dots, x_n は1次独立であると言う。各 x_i は他から独立した知識である。

4. 作用素

知識は独自には何の働きもしない。作用素が関わりを持って、知識から別の知識を生成する。作用素は知識を内包することはない。作用素は論理（含：アルゴリズム）のみをもつ。

定義

(1) 作用素 f が知識 x に対して知識 y を生成するとき、

$$y = fx$$

と表わす。

作用素 f が知識 x に対して意味を持たない場合、

$$fx = \theta$$

と表わす。即ち、空知識 θ を生成する。

(2) 作用素の加算

知識 x に対して作用素 f と g を適用して生成される知識の加算は、

$$fx + gx$$

のように一次結合で表現できるが、

$$(f + g)x$$

と表現しても良いことにする。これを知識の括りだしと呼ぶ。

上記の g を f で置き換えると、

$$(f + f)x = fx + fx$$

となるが、右辺の知識の加算結果は fx であるから、

$$(f + f)x = fx$$

となる。即ち

$$f + f = f$$

が成り立っている。

また、

$$fx + gx = gx + fx$$

だから、両辺の x を括りだすと、

$$(f + g)x = (g + f)x$$

となる。即ち、

$$f + g = g + f$$

作用素の加算は可換である。

(3) 恒等作用素

知識 x に対して影響を与えない作用素を恒等作用素と呼び、 Φ と表わす。

$$\Phi x = x$$

(4) 負の作用素

ある知識 x から知識 y を生成する作用素を f とするとき、知識 x から y の負の知識 $(-y)$ を生成する作用素を負の作用素と呼び、 $(-f)$ と表わす。

$$fx = y \quad *3$$

$$(-f)x = (-y) \quad *4$$

$$fx + (-f)x = y + (-y) = \theta$$

従って、

$$fx + (-f)x = \theta$$

※上記の*3, *4 から、

$(-f)x = (-fx)$ †
が成り立つ。

(5) 合成作用素

知識 x に対して作用素 g を適用して知識 z 、

$$z = gx$$

が生成され、

知識 z に対して作用素 f を適用して知識 y 、

$$y = fz$$

が生成されるとする。このとき、

$$y = f(gx)$$

と表記できる。 $f(gx)$ は fgx と書き、作用素 fg を f と g の合成作用素と呼び、 $h = fg$ のように書いても良い。なぜなら、 $f(gx)$ は知識 x に対して作用素 g を適用して得られる知識に作用素 f を適用しているが、これを fgx と書いても同じ論理(含:アルゴリズム)となるからである。 h は g と f から合成される作用素である。

※作用素の合成が可換ではないことは明かである。

$$fg \neq gf$$

(6) 逆作用素

知識 x に対して作用素 f を適用し、知識 y を生成するとしたとき、 y から x に戻す作用素を f の逆作用素と呼び、 f^{-1} と表わす。

作用素 f とその逆作用素 f^{-1} の合成は恒等作用素 Φ とする。

$$f f^{-1} = \Phi$$

$$f^{-1}f = \Phi$$

例 $y = fx$ が成り立つとき、その両辺に f^{-1} を適用すると、

$$f^{-1}y = f^{-1}fx = \Phi x = x$$

即ち、

$$f^{-1}y = x$$

である。

(7) 作用素の括りだし

知識 x 、 y に対して作用素 f を適用して生成される知識の加算は、

$$fx + fy$$

と一次結合で表現できるが、

$$f(x + y)$$

と表現しても良いことにする。これを作用素の括りだしと呼ぶ。

(8) 作用素集合

作用素を点とする集合を作用素集合と呼ぶ。作用素がソフトウェアの場合いくらでも生成できるので、作用素の集合は無限集合である。この無限集合の濃度は自然数 $(1, 2, 3, \dots)$ に対応する可算である。

5. 知識集合の定義

知識を点とする集合を知識集合と呼ぶ。

知識集合 X は次の BNF (Backus Normal Form) で表現される全ての要素を含む。

$$\langle \text{knowledge-set} \rangle ::= \{ \langle \text{gen-kn} \rangle, \langle \text{gen-kn} \rangle, \dots \}$$

$$\langle \text{gen-kn} \rangle ::= \theta \mid \{ e_1, e_2, \dots, e_n \} \mid [\langle \text{ope} \rangle] \langle \text{gen-kn} \rangle [+ [\langle \text{ope} \rangle] \langle \text{gen-kn} \rangle]$$

$$\langle \text{ope} \rangle ::= \{ \text{a operator in operator-set} \}$$

(i) $\langle \text{knowledge-set} \rangle$ は知識集合であり、 $\langle \text{gen-kn} \rangle$ から構成される。

$[\langle \text{ope} \rangle] \langle \text{gen-kn} \rangle [+ [\langle \text{ope} \rangle] \langle \text{gen-kn} \rangle]$ は単項あるいは2項である。

(ii) $\{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ は一次独立な知識であり、 X の基底と呼ぶ。

(iii) operator-set は作用素集合で、

$\{ \text{a operator in operator-set} \}$ は作用素集合の中の1つの作用素である。

作用素集合には負の知識 $(-)$ 、仮説 $'$ 、恒等作用素 Φ 、逆作用素も含まれる。

(iv) 知識集合 X の知識 x は1つの“知識の一次結合”から成る。配下には有限個の“知識の一次結合”がある。集合の点である知識にはそれらすべての“知識の一次結合”が知識集合 X 内の知識とは独立にこの知識に関連づけて存在する。

6. 知識集合の性質

(1) 知識集合 X のすべての知識は、

$$F_1 e_1 + F_2 e_2 + \dots + F_r e_r \quad (1 \leq r \leq n)$$

$$(F_i : i=1, 2, \dots, r \text{ は作用素})$$

と表わすことができる。

X の知識 z は一般的に、

$$z = f_1 y_1 + f_2 y_2 + \cdots + f_q y_q$$

と表される。 y_j ($j=1, 2, \dots, q$) についても同様に表わされる。更に y_j についても同じように展開されるが、展開は最終的に基底の一次結合：

$$g_1 e_1 + g_2 e_2 + \cdots + g_r e_r \quad (1 \leq r \leq n)$$

となったところで止まる。このようにして展開されたものを基底で整理すると、

$$F_1 e_1 + F_2 e_2 + \cdots + F_s e_s$$

($F_i : i=1, 2, \dots, s$ は作用素)

となることが確かめられる。

このとき、前に定義した知識の括りだしと作用素の括りだしを使う。

(2) 異なる基底をもつ知識は異なる知識である。

X の知識 x が異なる基底で表されるとする。例えば、

$$x = F_1 e_1 + F_2 e_2 + \cdots + F_r e_r$$

$$x = F_{r+1} e_{r+1} + F_{r+2} e_{r+2} + \cdots + F_s e_s$$

とすると、

$$F_1 e_1 + F_2 e_2 + \cdots + F_r e_r = F_{r+1} e_{r+1} + F_{r+2} e_{r+2} + \cdots + F_s e_s$$

である。

この両辺に $(-F_2 e_2), \dots, (-F_r e_r)$ を加えると、

$$F_1 e_1 + F_2 e_2 + (-F_2 e_2) + \cdots + F_r e_r + (-F_r e_r) = (-F_2 e_2) + \cdots + (-F_r e_r) + F_{r+1} e_{r+1} + F_{r+2} e_{r+2} + \cdots + F_s e_s$$

となる。左辺の項 $F_i e_i + (-F_i e_i)$ ($i=2, \dots, r$) は θ であるから、この式は、

$$F_1 e_1 = (-F_2 e_2) + \cdots + (-F_r e_r) + F_{r+1} e_{r+1} + F_{r+2} e_{r+2} + \cdots + F_s e_s$$

となる。 $(-F_i e_i)$ ($i=2, \dots, r$) は前ページ 6 の (†) を適用すると、

$$(-F_i e_i) = (-F_i) e_i \quad (i=2, \dots, r)$$

となるので、

$$F_1 e_1 = (-F_2) e_2 + \cdots + (-F_r) e_r + F_{r+1} e_{r+1} + F_{r+2} e_{r+2} + \cdots + F_s e_s$$

となる。左辺の F_1 を除くために両辺に F_1^{-1} を適用すると、 e_1 は $e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_s$ を使用して次のように表わされる。

$$e_1 = F_1^{-1} ((-F_2) e_2 + \cdots + (-F_r) e_r + F_{r+1} e_{r+1} + \cdots + F_s e_s)$$

右辺の F_1^{-1} は作用素の括りだしになっているので、これを各項に適用すると、 e_1 は e_2, \dots, e_r を使用して次のように表わされる。

$$e_1 = F_1^{-1} (-F_2) e_2 + \cdots + F_1^{-1} (-F_r) e_r + F_1^{-1} F_{r+1} e_{r+1} + \cdots + F_1^{-1} F_s e_s$$

これは、基底が一次従属であることを意味し、基底の定義に矛盾する。従って、異なる基底を持つ知識は異なる知識であることが分かる。

(3) 同じ基底をもつ1つの知識の表し方は一通りである。

これは、上記(2)とは異なり、同じ基底 e_1, e_2, \dots, e_r を持ち、異なる作用素から成る2通りの知識があるかという問題とみることができる。

今、 X の知識 x 、

$$x = F_1e_1 + F_2e_2 + \dots + F_re_r$$

が、

$$x = G_1e_1 + G_2e_2 + \dots + G_re_r$$

と表わされるとすると、

$$F_1e_1 + F_2e_2 + \dots + F_re_r = G_1e_1 + G_2e_2 + \dots + G_re_r \quad \star$$

である。

この両辺に、

$$(-G_1e_1), (-G_2e_2), \dots, (-G_re_r)$$

を加えると、右辺の各項 $G_ie_i + (-G_ie_i)$ は θ となるので、それらを加算した右辺は θ となる。

左辺の各項 $F_ie_i + (-G_ie_i)$ は、前ページ6の(†)を適用して $F_ie_i + (-G_i)e_i$ と書直すことができる。これに対して知識の括りだしを適用すると、

$$(F_i + (-G_i))e_i$$

が導かれる。

以上から、 \star を書き直すと、

$$(F_1 + (-G_1))e_1 + (F_2 + (-G_2))e_2 + \dots + (F_r + (-G_r))e_r = \theta$$

となる。 e_1 は e_2, \dots, e_r を使用して次のように表わされる。

$$e_1 = (F_1 + (-G_1))^{-1}(-(F_2 + (-G_2))e_2 + \dots + (F_r + (-G_r))e_r)$$

これは、基底が一次従属であることを意味し、基底の定義に矛盾する。従って、同じ基底をもつ1つの知識 x は一通りの表し方しかないことが分かる。

(4) 上記(1)で述べた知識集合 X のすべての知識の表し方：

$$F_1e_1 + F_2e_2 + \dots + F_re_r \quad (1 \leq r \leq n)$$

$$(F_i : i=1, 2, \dots, r \text{ は作用素})$$

は一通りである。

このことは上記(2)および(3)から明らかである。

(5) 空知識のみからなる知識集合は空集合 ϕ である。

(6) 知識集合 X の濃度は可算である。

有限個の基底から可算個の知識集合が構成できるのは、有限個の基底に対

して可算個の作用素が適用されて可算個の一次結合の知識が生成できるからである。

7. 部分集合と位相空間化

知識集合 X の部分集合を A とすると、

$$A \subset X$$

と表わすことができる。

知識定義の (iv) から分かるように、知識 x 自身が X の部分集合となっている。 A の補集合 A^c も X の部分集合である。 A 内の知識を構成する知識の一部が A^c に含まれるということはない。 A^c についても同様である。

知識集合 X の部分集合 A, B, C に対して和集合と積集合が存在し、次の集合演算が成り立つ。

$$(i) A \cup A = A, A \cap A = A$$

$$(ii) A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

$$(iii) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$(iv) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(v) A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$$

また、 A と A^c は 1 対 1 に対応し、

$$A \cup A^c = X, A \cap A^c = \phi$$

が成り立つ。

更に、ド・モルガンの法則も成り立つ。

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

部分集合はそれぞれ基底と作用素集合を持ち、 X の基底および作用素集合の部分集合となっている。この基底と作用素集合は生成された部分集合の要素である知識と関連付けられて存在するからである。

部分集合の集まりを部分集合族という。部分集合族を扱うことにより、知識集合に位相を導入（位相空間化）することができ、そこからさらに位相空間論のコンパクト性、連結性を導入することができる。本稿では位相空間論の各理論について再掲することはしない。結論からいうと、知識集合に距離の概念が導入できることが分かる。

8. 距離の導入について

抽象的な知識集合に距離を導入するには「正規空間が開集合の可算基をもて

ば、距離空間となる」という「距離づけ可能定理」が使われる。この定理が知識集合に適用されるまでには、位相空間論の様々な理論が使われる（位相空間論を参照）。

知識集合に距離づけ可能なことが分かっても、具体的な距離の与え方については個別に考えなければならない。

幸いなことに、本稿で導入した知識集合の各知識は、

$$F_1 e_1 + F_2 e_2 + \cdots + F_r e_r \quad (1 \leq r \leq n)$$

$$(F_i : i=1, 2, \dots, r \text{ は作用素})$$

という表現を持っている。そして、各知識の表し方は知識集合の中で一通りであることも分かっている。

知識 x, y について1次展開すると、それぞれ、

$$x = f_1 z_1 + f_2 z_2 + \cdots + f_q z_q$$

$$y = f_1 z_1 + f_2 z_2 + \cdots + f_q z_q + f_{q+1} z_{q+1}$$

だとすれば、 y は x に $f_{q+1} z_{q+1}$ が加わっただけであるから、 x と y の距離は近いといえる。 x と y の1次展開のすべての項が異なっても2次展開すれば同じ知識があるかもしれない。その場合少し離れるが、まだ近いかもしれない。最終的な展開が基底の一次結合になったとき、 x と y の基底がすべて異なれば、 x と y は全く異なる知識ということになる。このようにして知識集合のすべての知識の間の近さを求めることができる。しかし、これだけでは知識集合に距離を導入したことにはならない。

「距離づけ可能定理」を証明する過程で抽象的な位相空間と実数空間との間の対応づけが行われている。実数空間では距離が導入できるので、上記の知識の近さの考え方と実数空間の距離とに何等かの対応づけができれば知識集合の知識間の距離を実数空間で測ることができるだろう。現在のところ、その考え方は見えていない。

9. 知識集合に対する作用素

定義

- (1) 知識集合 A のすべての要素に対して作用素 f が知識集合 B のすべての要素を生成するとき、

$$B = fA$$

と表わす。

これを要素の知識の式で表すと、次のようになる。

知識集合は可算集合だから、 A の i 番目の知識 x_i に作用素 f を適用して生成される知識集合 B の i 番目の知識 y_i の間には、

$$y_i = fx_i$$

の関係がある。この式の $i=1, 2, \dots$ のすべてを集めると、

$$\{y_i\} = \{fx_i\} \quad (i=1, 2, \dots)$$

となる。 $\{fx_i\}$ は $f\{x_i\}$ と書いても良いことにすると、

$$\{y_i\} = f\{x_i\} \quad (i=1, 2, \dots)$$

となる。

逆に、

$$A = \{x_i\} \quad (i=1, 2, \dots)$$

$$B = \{y_i\} \quad (i=1, 2, \dots)$$

とおくと、

$$B = fA$$

が求められる。

(2) 作用素で生成された知識集合と元の知識集合の要素は 1 対 1 に対応する。

知識集合 A に作用素 f が適用されて知識集合 fA が生成されたとする。

このとき、

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A \quad \text{ならば} \quad fx, fy \in fA \\ (x \neq y) \quad \quad \quad (fx = fy) \end{aligned}$$

とする。つまり、 x と y は作用素 f により同じ要素を生成するとする。

$fx = fy$ の両辺に f の逆作用素 f^{-1} を適用すると、

$$f^{-1}fx = f^{-1}fy$$

$$\therefore \Phi_x = \Phi_y$$

$$\therefore x = y$$

となって x と y は同じでなければならないが、前提とした $x \neq y$ に矛盾する。

従って、 $fx \neq fy$ が成り立ち、 A と fA の要素は 1 対 1 に対応することが分かる。

(3) 知識集合 X の部分集合 A, B, C に対して和集合と積集合が存在し、各種集合演算が成り立つことは 7. で述べたが、部分集合 A, B, C に作用素 f を適用して生成される知識集合 fA, fB, fC に対しても同様に次の集合演算が成り立つ。これは知識集合 fA, fB, fC も通常の集合であるからことから明らかである。

$$(i) fA \cup fA = fA \quad , \quad fA \cap fA = fA$$

- (ii) $fA \cup fB = fB \cup fA$ 、 $fA \cap fB = fB \cap fA$
- (iii) $fA \cup (fB \cap fC) = (fA \cup fB) \cap fC$ 、 $fA \cap (fB \cap fC) = (fA \cap fB) \cap fC$
- (iv) $fA \cup (fB \cap fC) = (fA \cup fC) \cap (fA \cup fB)$ 、 $fA \cap (fB \cup fC) = (fA \cap fB) \cup (fA \cap fC)$
- (v) $fA \cup (fA \cap fB) = fA$ 、 $fA \cap (fA \cup fB) = fA$

また、 fA と $(fA)^c$ は 1 対 1 に対応し、

$$fA \cup (fA)^c = X \text{、} fA \cap (fA)^c = \phi$$

が成り立つ。

更に、ド・モルガンの法則も成り立つ。

$$(fA \cup fB)^c = (fA)^c \cap (fB)^c \text{、} (fA \cap fB)^c = (fA)^c \cup (fB)^c$$

- (4) 知識集合 A_1 、 A_2 があり、その和集合 $A_1 \cup A_2$ および積集合 $A_1 \cap A_2$ に作用素 f を適用した結果は元の集合 A_1 、 A_2 に作用素 f を適用した fA_1 、 fA_2 の和集合および積集合に等しい。

$$f(A_1 \cup A_2) = fA_1 \cup fA_2$$

$$f(A_1 \cap A_2) = fA_1 \cap fA_2$$

これは、前記の定義 (2) で述べた「作用素で生成された知識集合と元の知識集合の要素は 1 対 1 に対応する」から導かれる。

いま、

$$A_1 \text{ の要素を } \{x_{11}, x_{12}, \dots\}$$

$$A_2 \text{ の要素を } \{x_{21}, x_{22}, \dots\}$$

とすると、

$$A_1 \cup A_2 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{21}, x_{22}, \dots\}$$

$$A_1 \cap A_2 = \{x_{31}, x_{32}, \dots\}$$

ここに、各 x_{3i} ($i=1, 2, \dots$) は $\{x_{11}, x_{12}, \dots\}$ と $\{x_{21}, x_{22}, \dots\}$ の間で共通な要素である。

和集合 $A_1 \cup A_2$ に作用素 f を適用すると、

$$\begin{aligned} f(A_1 \cup A_2) &= f\{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{21}, x_{22}, \dots\} \\ &= \{fx_{11}, fx_{12}, \dots, fx_{21}, fx_{22}, \dots\} \\ &= \{fx_{11}, fx_{12}, \dots\} \cup \{fx_{21}, fx_{22}, \dots\} \\ &= f\{x_{11}, x_{12}, \dots\} \cup f\{x_{21}, x_{22}, \dots\} \\ &= fA_1 \cup fA_2 \end{aligned}$$

従って、 $f(A_1 \cup A_2) = fA_1 \cup fA_2$ が成り立つ。

次に、積集合 $A_1 \cap A_2$ に作用素 f を適用すると、

$$f(A_1 \cap A_2) = f\{x_{31}, x_{32}, \dots\}$$

$$= \{f_{x_{31}}, f_{x_{32}}, \dots\}$$

この各 x_{3i} ($i=1, 2, \dots$) は $\{x_{11}, x_{12}, \dots\}$ と $\{x_{21}, x_{22}, \dots\}$ の間で共通な要素であり、かつ作用素 f により、 x_{3i} ($i=1, 2, \dots$) は $f_{x_{3i}}$ に 1 対 1 に対応するので、

$$f(A_1 \cap A_2) = fA_1 \cap fA_2$$

が成り立つ。

(5) 直交作用素

(i) 知識集合 A が互いに共通点のない知識集合 A_1, A_2, \dots, A_n の和集合とする。

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

(ii) 作用素 f が作用素 f_1, f_2, \dots, f_n の加算から成るとする。

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

上記 2 つの条件が成り立ち、 f_i ($i=1, 2, \dots, n$) が集合 A_i の要素に対してだけ意味を持ち、 A_j (j は i 以外の番号) の要素に対して意味を持たないとする。このとき、

$$fA = f_1A_1 \cup f_2A_2 \cup \dots \cup f_nA_n \quad \star$$

が成り立つ。このような作用素 f を A に対する直交作用素と呼ぶ。

この \star が成り立つことは、次のようにして導かれる。

条件 (i) から、

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad (A_i \text{ には互いに共通点がない})$$

である。

この両辺に作用素 f を適用すると、

$$fA = f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

となる。知識集合の和集合に作用素 f を適用した結果は元の集合に作用素 f を適用した集合の和集合に等しいことは前記 (4) で述べた。これを上記の式の右辺に適用すると、

$$fA = f(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = fA_1 \cup fA_2 \cup \dots \cup fA_n$$

即ち、

$$fA = fA_1 \cup fA_2 \cup \dots \cup fA_n \quad *$$

である。

A_1, A_2, \dots, A_n は可算集合だから、

A_1 の要素を $\{x_{11}, x_{12}, \dots\}$

A_2 の要素を $\{x_{21}, x_{22}, \dots\}$

...

A_n の要素を $\{x_{n1}, x_{n2}, \dots\}$

とおき、作用素 f を適用すると、

$$fA_1 = f\{x_{11}, x_{12}, \dots\} = \{fx_{11}, fx_{12}, \dots\}$$

$$fA_2 = f\{x_{21}, x_{22}, \dots\} = \{fx_{21}, fx_{22}, \dots\}$$

...

$$fA_n = f\{x_{n1}, x_{n2}, \dots\} = \{fx_{n1}, fx_{n2}, \dots\}$$

} †

である。

作用素 f は条件 (ii) から、

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n \quad (f_i \text{ は } A_i \text{ に対しては意味をもち、その他の } A_j \text{ に対しては意味をもたない})$$

である。この f を上記 (†) の式に適用する。

$$\begin{aligned} fA_1 &= \{fx_{11}, fx_{12}, \dots\} \\ &= \{(f_1 + f_2 + \dots + f_n)x_{11}, (f_1 + f_2 + \dots + f_n)x_{12}, \dots\} \\ &= \{f_1x_{11} + f_2x_{11} + \dots + f_nx_{11}, f_1x_{12} + f_2x_{12} + \dots + f_nx_{12}, \dots\} \\ &= \{f_1x_{11} + \theta + \dots + \theta, f_1x_{12} + \theta + \dots + \theta, \dots\} \\ &= \{f_1x_{11}, f_1x_{12}, \dots\} \\ &= f_1\{x_{11}, x_{12}, \dots\} \\ &= f_1A_1 \end{aligned}$$

即ち、

$$fA_1 = f_1A_1$$

同様にして、

$$fA_2 = f_2A_2$$

...

$$fA_n = f_nA_n$$

これらを上記 (*) に適用すると、

$$fA = f_1A_1 \cup f_2A_2 \cup \dots \cup f_nA_n$$

が得れる。

これで上記 (☆) が求められた。

